Capitolo 1

Breve storia delle notazioni

1.1 $ax^2 + bx + c = 0$

Il titolo un po' criptico di questa sezione serve a mettere in luce un aspetto forse sottovalutato: l'importanza di un'adeguata notazione nello sviluppo di un settore della matematica. La storia delle equazioni algebriche è una palestra ricca di spunti perché permette di studiare l'evoluzione di notazioni che oggi sono divenute a tutti familiari. È forse questo il momento per richiamare una celebre distinzione in tre fasi dello sviluppo dell'algebra, dovuta al matematico ed orientalista tedesco Georg Heinrich Ferdinand Nesselman (1811-1881) che divideva l'algebra in *retorica*, *sincopata* e *simbolica* a seconda che le equazioni fossero descritte verbalmente (algebra retorica), attraverso il ricorso ad opportune abbreviazioni (algebra sincopata) o, infine, con l'impiego di simboli (algebra simbolica). Queste tre tappe *non* descrivono un processo storico *lineare*: Nesselmann colloca nell'alveo dell'algebra retorica gli arabi e gli algebristi italiani operanti dal XII al XVI secolo mentre colloca Diofanto a livello dell'algebra sincopata, benché vissuto molti secoli prima degli algebristi retorici menzionati sopra; inoltre gli indiani sono collocati come esponenti dell'algebra simbolica, affermazione contestata da Léon Rodet nel 1881 con l'opera *Sur les Notations Numériques et Algébriques antérieurement au XVIe Siècle.* Per Rodet, alla completezza delle notazioni indiane *mancano, per poter essere mes sa in parallelo con la nostra, due cose fondamentali: dei simboli speciali per le operazioni dirette di somma e moltiplicazione, ed un modo di rappresentare i parametri che figurano con le variabili propriamente dette nelle nostre espressioni algebriche, alternativo alluso di numeri particolari*[1] ([1], p.112). Egli a sua volta propose una classificazione dicotomica tra l'algebra delle abbreviazioni e dei *numeri* assegnati e l'algebra simbolica, propriamente detta: Diofanto cadrebbe nel primo caso e la nascita dell'algebra moderna sarebbe avvenuta quando germinò l'idea

[1] manque, pour être mise en parallèle avec la nôtre, deux choses essentielles: des signes spéciaux pour les deux opérations directes de l'addition e de la multiplication, et le moyenne de représenter autrement que par des nombres particuliers le paramètres qui entre, simultanément aux variables proprement dites, dans nos expressions algébriques.

di rappresentare i dati del problema in forma generale grazie ad un simbolo, di esprimere parimenti in forma simbolica ogni operazione con un segno speciale e di giungere in questo modo non solo a risolvere con maggior o minore semplicità un problema particolare ma di trovare formule che forniscono la risoluzione di tutti i problemi di un certo tipo e, permettendo di caratterizzare ogni tipo di problema, consentono di esprimere proprietà generali di certe categorie di numeri, di certe famiglie di figure o a formulare le leggi di certe classi di fenomeni naturali.[2] (*cfr.* [1], p.113)

Si tratta di una posizione un po' drastica che ho riportato qui per mostrare l'opportunità di discutere l'evoluzione delle notazioni algebriche. Un'equazione come $ax^2 + bx + c = 0$ pone diversi spunti di indagine storica per studiare

- l'origine e l'evoluzione dello 0;
- il segno di uguaglianza;
- i segni per le operazioni aritmetiche $+$ e $-$;
- l'uso degli esponenti;
- il modo di indicare l'incognita dell'equazione;
- il modo in cui un'equazione viene scritta;
- la distinzione tra coefficienti letterali ed incognite e la possibilità di abbracciare in un solo caso infinite equazioni.

Senza pretesa di completezza, nel seguito daremo alcune informazioni per lo studio di questi temi, rimandando chi volesse ulteriori approfondimenti alla letteratura riportata in bibliografia. In particolare, molte delle osservazioni riportate in questo capitolo sono tratte dal I volume dell'importante *A History of Mathematical Notations* dello storico della matematica Florian Cajori [2] che, a più di ottant'anni dalla pubblicazione, resta il riferimento indispensabile per chi è interessato allo studio delle notazioni matematiche.

Anzitutto lo zero. Carl Boyer [3] osservò che quando si parla delle origini dello zero occorre precisare in quale senso tali origini siano ricercate. Si può chiedere quando sia stato usato per primo un *simbolo* od un segno specifico per indicare una posizione vuota all'interno di un sistema di numerazione posizionale. In alternativa, si può indagare l'origine del *concetto* di zero come classe nulla o assenza di una grandezza, ovvero studiare la distinzione tra l'idea filosofica di nulla e lo zero matematico. Infine si può esaminare lo *status* dello zero come *numero*, soggetto alle regole delle operazioni artimetiche ordinarie.

[2] de représenter les données du problème sous forme général par un symbole, de symboliser également les opérations chacune par une signe spécial, et d'arriver ainsi non plus à resoudre avec plus ou moins de facilité un problème particulier, mais à trouver des formules donnant la solution de tous les problèmes d'une même espèce, et, parce qu'elle servait à caractériser chaque espece de problème, servant à exprimer les propriétés générales de certaines catégories des nombres, de certaines familles de figures, où a formuler les lois de certaines classes de phénomènes naturels.

Affinché un simbolo per lo zero si renda necessario occorre che sia in uso un sistema di numerazione posizionale in una qualche base e tra le civiltà antiche la civiltà babilonese, che succedette a quella sumera, utilizzava un sistema di numerazione sessagesimale già nel 2000 a.C [4]. Tuttavia, forse perché in un sistema di questo tipo l'occorrenza di posti vuoti è molto meno frequente rispetto al sistema decimale, non si trova traccia per lungo tempo di un simbolo specifico per lo zero che comparirà nel periodo persiano. I babilonesi influenzarono l'astronomia greca e ne è anche prova il fatto che questi adottarono uno schema sessagesimale per la rappresentazione delle parti frazionarie di un numero. L'occorrenza di una posizione vuota veniva segnalata dalla lettera *omicron o*, presumibilmente dall'iniziale della parola *οιδεν*, vuoto. Un simbolo lentiforme ad indicare posizioni vuote compare in iscrizioni Maya risalenti all'inizio dell'era cristiana. I Maya adoperavano un sistema di numerazione in base venti. Il simbolo zero in un sistema decimale fu introdotto dagli indiani il cui ruolo nello sviluppo del sistema di numerazione che, per il tramite degli arabi, giungerà in Europa, è forse stato sopravvalutato [3]. In tutti questi esempi però il simbolo è volto ad indicare una posizione vuota ma non vi è alcuna prova che testimoni l'uso dello zero come numero a sé stante, disgiunto da altri numeri, su cui eseguire delle *operazioni*. Quanto al concetto di zero come vuoto o nulla, anche se vi sono stati tentativi di attribuirlo a Platone, il primo testo a recare traccia inequivoca del concetto di zero in questo senso è la *Fisica* di Aristotele nella quale viene esposta la teoria secondo cui la velocità di un corpo è inversamente proporzionale alla resistenza offerta dal mezzo in cui esso si muove. L'argomento per negare la plausibilità del vuoto è che se questo esistesse un corpo vi si muoverebbe ad una velocità che supererebbe ogni rapporto e per corroborare l'assurdità dell'esistenza del vuoto Aristotele paragona questo moto ipotetico all'impossibilità di stabilire un rapporto tra zero ed un numero qualunque, allo stesso modo in cui non si può dire che un segmento superi un punto, se non lo si vuole ammettere come formato da punti. Questo passo di Aristotele è importante perché mostra come Aristotele avesse chiara l'impossibilità di rapporti del tipo $a/0$. Tuttavia, il concetto di numero utilizzato dai Greci come pluralità di unità ne soffocava il respiro impedendo allo zero di raggiungere la dignità di numero. Questo passo fu compiuto, non senza incertezze, dagli indiani i quali però avevano un concetto di numero non molto preciso, pur operando su quantità positive, negative e sullo zero. In particolare, Varahamihira (505-587) affermò che il valore di una quantità non cambia se le si aggiunge o sottrae lo zero; nel 628 Brahmagupta (598-668) esprime correttamente le regole $0 \times (\pm a) = 0$, $0 \times 0 = 0$ e $\sqrt{0} = 0$ ma, mille anni dopo Aristotele, non è sicuro sul valore da attribuire a $a/0$ ed erroneamente ritiene che $0/0 = 0$. Cinque secoli più tardi, nel XII secolo, Bhaskara (1114-1185) dirà che la divisione di un numero per zero porta ad infinito come risultato, anche se non è preciso su questa nozione. La libertà degli indiani di operare su numeri positivi, negativi (la parola indiana per indicare un numero positivo è la stessa usata per indicare un bene od una proprietà, mentre quella per indicare un numero negativo si può rendere con perdita o debito) [5] o sullo zero non significò l'accettazione di radici negative di un'equazione e tale atteggiamento passò in eredità agli arabi e di riflesso agli europei che per

molto tempo non ritennero accettabili come radici di equazioni né lo zero né numeri negativi. Soluzioni negative compaiono in problemi risolti da Leonardo Pisano (Fibonacci, 1170-1250) e presenti nel *Liber Abaci* (1202), nel *Flos* (1225) e nella *Epistola ad Theodorum* (1225 ca.): qui troviamo problemi di natura commerciale di cui si afferma l'insolubilità a meno di non ammettere la possibilità di debiti: *pertanto il problema sarebbe insolubile, a meno di ammettere che il primo abbia un debito*[3] [6]; (si veda [5], p.129 per una affermazione simile contenuta nel Flos). Un autore che accetterà soluzioni negative senza esitazioni sarà Albert Girard (1590-1633) [8] nella *Invention Nouvelle en L'algèbre* pubblicata nel 1629 ma la distinzione tra radici *vere* e *false* di un'equazione resterà ancora per un po' di tempo, come vedremo più avanti.

Verso la fine del XV secolo, nella *Triparty* di Nicolas Chuquet (1445-1488) del 1484 ma rimasta inedita per quasi quattro secoli, si parla dello zero dicendo che *non vale o significa nulla.... e per questo motivo viene detto cifra, nulla o numero di nessun valore.*[4] ([3], p. 329)

Chuquet fu anche il primo ad usare lo zero come *esponente*, inaugurando un uso che sarà continuato nei testi di algebra del XVI secolo, come l'*Arithmetica Integra* di Michael Stifel (1486(7)-1567) pubblicata nel 1544 dove lo zero viene utilizzato come coefficiente di un monomio che non figura in un polinomio, come in questo esempio: $x^3 + 1 = x^3 + 0x^2 + 0x + 1$. Per chiudere, diciamo qualcosa sulla parola zero. Le origini qui sono meno controverse in quanto il termine *sunya* (vuoto) impiegato dagli indiani fu mutato nell'arabo *sifr* che giunse in Europa tramite i maestri d'abaco italiani, primo fra tutti Fibonacci, che lo rese con *zefira* da cui *cifra* e *zero* discesero e si diffusero in Europa.

Quanto al segno di uguaglianza, si può dire che fin dal papiro egizio di Ahmes (1550 a.C. circa) contenente un'equazione di primo grado si trovi un simbolo per indicare la locuzione *uguale a*. Tra i greci Diofanto utilizzò il simbolo i^σ, deformato in una h rovesciata da copisti successivi. In ambiente indiano, nel manoscritto Bakhshali[5] l'abbreviazione *pha* della parola *phala* assolve il ruolo di simbolo di uguaglianza mentre tra gli arabi, Al-Qalasâdî si servì di un simbolo simile a quello di Diofanto. Venendo nell'Europa del XV secolo troviamo Johann Müller (Regiomontano, 1436-1476) e Luca Pacioli (1445-1517) utilizzare una lineetta $-$ come simbolo di uguaglianza. Quest'ultimo nella *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita* del 1494 utilizzò lo stesso simbolo con diversi altri significati ma l'uso della linea come simbolo di uguaglianza è presente in altri testi di poco posteriori, come la *Pratica d'Arithmetica* di Francesco Ghaligai, che ebbe varie edizioni tra il 1521 ed il 1552. Lo storico della matematica italiano Ettore Bortolotti ritrovò un manoscritto contenuto nella biblioteca dell'Università di Bologna in cui il segno di uguaglianza aveva la forma attuale: $=$. È plausibile che il cambiamento sia stato dettato dal desiderio di rimuovere possibili fonti di ambiguità nell'uso di un simbolo, come $-$, che aveva già molti significati (p. 111 di [2]). Restando in Italia, Gerolamo Cardano utilizzò a volte uno spazio vuoto al posto del segno di uguaglianza.

[3] tunc quaestio esse insolubilis, nisi concederetur, primus habere debitum;

[4] ne vault ou signifie rien... et pour ce est appellée chiffre ou nulle ou figure ne nulle valeur.

[5] Manoscritto rinvenuto nel 1881 presso l'omonimo villaggio indiano.

La prima occorrenza del segno = per indicare l'uguaglianza in un testo a stampa si ha nel 1557 con la pubblicazione avvenuta a Londra del *Whetstone of Witte*, primo testo di algebra in lingua inglese, del matematico gallese Robert Recorde (1510ca.-1558). In altri casi si ricorreva ad espressioni retoriche come, a seconda della lingua, *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *gleich*, *faciunt*, *gheljick*, mentre talvolta compariva l'abbreviazione *aeq.* Questa abitudine permase ben oltre l'edizione del testo di Recorde e si dovette attendere il 1618 per ritrovare il segno di = in un testo a stampa, con il significato di uguaglianza. Precisamente, l'occorrenza si ha nell'Appendice della traduzione inglese della *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* di John Napier (Nepero, 1550-1617), curata verosimilmente da William Oughtred (1574-1660). In Inghilterra, l'accettazione del simbolo = di Recorde avvenne verso il 1630 quando fu adottata in tre testi che ebbero buona diffusione: la *Artis analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* di Thomas Harriot (1560-1621), pubblicata postuma nel 1631, la *Clavis mathematicae* di William Oughtred, e la *Trigonometria* di Richard Norwood (1590?-1675), anch'esse pubblicate nel 1631.

La situazione è molto più complicata sul continente dove il segno = era adoperato con significati diversi ed altri simboli erano utilizzati per indicare l'uguaglianza. Ad esempio, nella *In Artem Analyticem Isagoge* [25] del 1591, François Viète (1540-1603) indicava con = la *differenza* di due parametri A e B di cui non fosse noto il maggiore, sicché $A = B$ significa $|A - B|$ mentre René Descartes (Cartesio, 1596-1650) utilizzava = nella Géométrie (1637) come $\pm$; infine, nella *Mathesis biceps* del 1670 Juan Caramuel y Lobkowitz (1606-1682) impiegava = come separatore tra la parte intera e quella decimale di un numero.

Tra i simboli alternativi ad = per indicare l'uguaglianza segnaliamo [, adoperato nel 1559 nella *Logistica* del monaco francese J. Buteo e $\|$, pubblicato nel 1571 nell'edizione dell'*Arithmetica* di Diofanto curata da Wilhelm Holtzman (Xylander, 1536-1572) ed adoperato saltuariamente da altri matematici come Michelangelo Ricci (1619-1682), René François Walter De Sluze (1622-1685) e Philippe De la Hire (1640-1718). Questi ed altri simboli (cfr. §263 di [2]) non costituirono seri antagonisti del simbolo di Recorde che invece fu minacciato da quello usato da Cartesio nella *Géométrie* la cui forma (simile a $\propto$) si pensava derivasse da *æ*, come iniziali della parola *aequalis*, benché l'analisi dei manoscritti abbia permesso di concludere che si tratta piuttosto dell'avvicinamento di *o* ed *e*, *œ*; secondo Cajori ([2], §264) il simbolo $\propto$ va ricondotto al simbolo della costellazione del Toro che, occorrendo regolarmente nelle pubblicazioni astronomiche, era a disposizione dei compositori dei testi a stampa. Lungo tutto il resto del XVII secolo, il simbolo di Cartesio prevalse su quello di Recorde nell'Europa continentale mentre la situazione opposta si incontrava nella penisola britannica. Tra i primi testi a stampa pubblicati sul continente a riportare il segno = nell'accezione di uguale, ricordiamo la *Teutsche Algebra* (1659) dello svizzero Johann Heinrich Rahn. Un grande impulso alla diffusione di = nell'Europa continentale fu dovuto all'uso che ne fecero matematici come John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) ed Isaac Newton (1643-1727) anche se la spinta decisiva verso l'adozione di = a discapito di $\propto$ fu il fatto che esso venne impiegato sistematicamente da Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) la

cui influenza nell'Europa di fine '600 sembra risolutiva per decidere da quale piatto far pendere la bilancia.

Anche i segni di addizione e sottrazione hanno una lunga storia, svolta in dettaglio in [2], §§200-216. Ideogrammi corrispondenti al segno di sottrazione sono stati individuati in tavolette babilonesi, così come nel papiro di Ahmes è stato individuato un simbolo di addizione. Simboli per la sottrazione sono noti in Diofanto mentre nell'Aritmetica di Bakhshali il segno + indica la sottrazione. Un segno per la sottrazione compare anche nell'opera dell'arabo al-Qalasâdi del XV secolo il quale invece indica l'addizione con la sola giustapposizione degli addendi. In Europa, Chuquet prima, Pacioli dopo, utilizzarono p o $\tilde{p}$ per il segno di addizione, dall'iniziale di *plus* e m o $\tilde{m}$ per la sottrazione, dall'iniziale di *minus*. Quest'uso rimase ben radicato tra i matematici italiani del XVI secolo. I segni + e − come segni di addizione e sottrazione entrarono in scena in Germania nell'ultimo ventennio del XV secolo. Il simbolo −, detto *minnes*, figura in un testo di algebra manoscritto conservato a Dresda risalente al 1481. In un altro manoscrittto della stessa collezione compare il segno + per l'addizione, altrove espressa dalla parola *vnd*. Il primo testo a stampa che rechi entrambi i segni è *Behēde und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* (1489) di Johann Widman (1462-1498), professore a Lipsia. L'origine del segno + pare vada ricercata tra le molte abbreviazioni della congiunzione latina *et* che si poteva anche indicare con un + in cui l'asta verticale non era ortogonale a quella orizzontale. Meno certa appare invece l'origine del segno −. La competizione dei segni + e − con p e m durò fino all'inizio del XVII secolo quando questi ultimi cedettero il passo ai simboli che impieghiamo ancora oggi.

Se, come osserva Tignol ([9], p. 26) l'uso di p ed m al posto di + e − non era un ostacolo serio, ben diverso è l'effetto avuto dalla notazione per i polinomi sulla speditezza dei calcoli e la trasparenza dei ragionamenti. Esaminiamo due aspetti: l'evoluzione della notazione per l'incognita e per le sue potenze successive. Nell'algebra araba non era sempre chiaro se x od x^2 fossero da considerare l'incognita principale per cui, al esempio, in Al-Kwaritzmi ed in altri algebristi arabi antichi l'incognita principale da determinare è x^2, detta *māl*, cioè somma di denaro, era l'incognita principale mentre x, detta *jidr* in arabo (cioè radice, parte più bassa o base) era un'incognita intermedia da ottenere tramite risoluzione dell'equazione proposta e da elevare al quadrato per ottenere x^2. Sempre Al-Kwaritzmi indicava con la parola *shai*, cosa, un'incognita in genere, interpretabile come x o come x^2. Nel passaggio in occidente traduttori come Gherardo di Cremona (1117-1184) resero *jidr* con *radix* e *shai* con *res* a sua volta passato nell'italiano *cosa*, nel tedesco *coss* e, in forma aggettivata, nell'inglese *cossic* che, per tutto il XVI e XVII furono dei veri e propri sinonimi della parola algebra: *Coss* e *Cossic art*, rispettivamente. L'abbreviazione *co.* entrò diffusamente in uso al posto di cosa per indicare l'incognita. Più complicato era scrivere un polinomio. Non vi era alcuna notazione esponenziale e le potenze dell'incognita erano indicate da un'abbreviazione. Se un'abbreviazione di x era ℓ per *latus*, il quadrato x^2 era indicato con q (*quadratus*) oppure con *ce*, da *census*, x^3 con c (*cubus*) *ce.ce.*, bq o qq per x^4. Con x^5 sorgeva un'altra fonte di confusione. Questa è la prima potenza a non essere né un quadrato né un cubo e per que-

sto Pacioli, riprendendo una nomenclatura egizia lo abbreviava con *p.r.*, *primo relato*; così dunque x^7 diventa $2^\circ.r^\circ$, *secundo relato*, ed x^{11} è $3^\circ.r^\circ$, *tertio relato*, ecc. Con x^5 ed x^6 nasceva un'ulteriore confusione perché, se Pacioli indica x^6 con *ce.cu.*, cioè *censo de cubo*, vale a dire $(x^3)^2$, seguendo così il principio *moltiplicativo* degli esponenti, altri autori, aderendo ad un principio *additivo*, indicavano $x^5 = x^2 \cdot x^3$ con *ce.cu.*, facendo prevalere la regola del prodotto di potenze con ugual base. Un polinomio come $3x - x^3$ veniva scritto da Bartolomeo Pitisco (1561-1613) nella *Trigonometriae editio tertia* del 1612 come $3\ell - 1c$ ed il suo quadrato come $9q - 6bq + 1qc$ dove bq sta per biquadrato, cioè x^4 e qc indica il quadrato-cubo, cioè x^6, secondo il principio moltiplicativo. Nella *Ars Magna* del 1545 Girolamo Cardano (1501-1576) non impiega *co.* per l'incognita ma *pos.*: *rem incognitam, quam vocamus positionem* e *quad.* per il suo quadrato per cui un'equazione come $x^2 + 2x = 48$ diventa $1.quad.\bar{p}2.pos.aeq.48$ ([2] p.117, [9], p.26). Seguendo le linee del manoscritto di Chuquet del 1484 che indicava un monomio come $12x^2$ come 12^2, omettendo la base, nel XVI secolo i germi di una notazione esponenziale compaiono nell'*Algebra* (1572) di Rafael Bombelli (1526-1572) dove un'equazione come $2 = x^2 + x$ veniva scritta come

$$2. \quad \text{Eguale à} \quad \overset{2}{\underset{1}{\smile}} \quad p \quad \overset{1}{\underset{1}{\smile}}$$

dove manca ancora ogni indicazione della base e dunque è adatta a situazioni in cui una sola incognita entra in gioco. Nonostante notazioni infelici, le idee circa l'algebra dei polinomi erano chiara come mostra questo passo estratto dal *Libro de Algebra* (1567) del matematico portoghese Pedro Nuñez, riportato in [2], p. 163

...se desideriamo moltiplicare .4. co. per 5.ce. diremo che .4. per .5. dà .20. e che siccome .1., l'esponente di co., sommato con .2. esponente del censo dà .3. che è l'esponente del cubo, pertanto .4. co. per .5.ce. dà .20.cu.[6]

Un miglioramento si ebbe con il belga Simon Stevin (1548-1620) che nel 1585 pubblicò *La Disme* (in fiammingo: *Die Thiende*) in cui estese la notazione decimale ai polinomi cosicché un polinomio come $x^2 - 12$ era indicato come $1(2) - 12$ dove, nell'originale, l'esponente era messo all'interno di un cerchietto, anziché tra una coppia di parentesi. Stevin, quando doveva operare con più incognite introduceva i simboli 1(1) ed 1.sec.(1) cosicché l'espresione $12y^4 + 23xy^2 + 10x^2$ diventa $12\,sec.(4) + 23(1)M\,sec.(2) + 10(2)$ dove M indica la moltiplicazione tra le diverse incognite. Un grosso passo in avanti fu quello introdotto da François Viète che per primo adoperò in modo *sistematico* le lettere per indicare i coefficienti che comparivano nelle equazioni. Un uso saltuario di lettere per indicare parametri si trova già in Fibonacci e in Giordano Nemorario (1225-1260). Anche Bombelli aveva introdotto dei parametri per dare regole generali di soluzione di problemi di secondo grado. La distinzione tra coefficienti ed incognite seguiva la regola che le vocali (A,E,I,O,V,Y) erano usate per le incognite mentre

[6] si queremos multiplicar .4. co. por .5. ce. diremos asi .4. por .5. hazen .20. y porque .1. denominaciõ de co. sũmado con .2. denominacion de censo hazen .3. que es denominaciõ de cubo. Diremos por tanto q. .4. co. por .5. ce. hazen .20. cu.

le consonanti indicavano i coefficienti. È stato sottolineato ([2], p.183) come questa scelta possa indicare un rinato interesse per le lingue semitiche in cui le consonanti sono indicate mentre le vocali debbono essere ricostruite a partire dalle consonanti. Va però osservato che, quando deve trattare equazioni a coefficienti numerici, Viète non indica più l'incognita con una vocale ma la indica con N (*numerus*) mentre il suo quadrato ed il cubo sono indicati con Q e C, rispettivamente. Osserviamo come l'avanzamento notazionale di Viète fu in parte oscurato dal desiderio di porre sempre in luce l'omogeneità dimensionale di tutti i termini che comparivano in una equazione. Ad esempio, l'equazione di terzo grado $x^3 + 3bx = 2z$ nell'incognita x era resa da Viète come

$$A \quad \text{cubus} + b \text{ plano } 3 \text{ in } A \quad \text{aequari } z \text{ solido } 2$$

dove, a parte indicare l'incognita con la vocale A, si insiste sul fatto che b deve avere dimensione due (*plano*) mentre z deve avere dimensione 3 (*solido*). Un'altra limitazione di Viète, comune ad altri studiosi dell'epoca, fu di restringere le incognite ad assumere valori *positivi*. A parte questi difetti, Viète ebbe comunque il merito di affiancare al calcolo numerico (*logistica numerosa*) quello simbolico (*logistica speciosa*). Nell'avvicinamento alla moderna notazione esponenziale possiamo ricordare Adriaan van Roomen (Romanus, 1561-1615) che scrive

$$A(4) + B(4) + 4A(3) \quad in \quad B + 6A(2) \quad in \quad B(2) + 4A \quad in \quad B(3)$$

laddove scriveremmo

$$A^4 + B^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + AB^3$$

ed il francese Pierre Hérigone (1580-1643) che scriveva $a3$, $2b4$, $2ba2$ dove oggi scriveremmo a^3, $2b^4$ e $2ba^2$, rispettivamente e dunque pone sempre l'esponente *dopo* la lettera cui si riferisce, mentre il coefficiente viene posto *prima* della lettera cui si riferisce.

Nel 1636 James Hume, uno scozzese residente a Parigi, pubblicò *L'Algèbre de Viète, d'une methode nouvelle claire et facile* in cui emendava la notazione di Viète scrivendo A^{iii} per A^3 e dunque, se si eccettua l'uso del numerale romano per l'esponente, questa notazione coincide con quella moderna che fu introdotta un anno più tardi, nel 1637, da Cartesio nella *Géométrie*, con l'eccezione di x^2 per il quale sopravvisse la notazione xx, almeno fino a Gauss.

Quanto al modo di presentare le equazioni, la forma utilizzata nel titolo, che è quella a cui siamo abituati si impose a partire da Cartesio che la adottò nel III Libro della Géométrie, dedicato allo studio delle equazioni algebriche ma che si trova in altri autori precedenti, ad esempio in Peter Roth (1583-1663) e nei *Miracula Arithmetica* di Johann Faulhaber (1580-1635), precedenti a Cartesio e in un paio di esempi contenuti nell'*Algebra* di Rafael Bombelli. In Cardano le equazioni figurano con coefficienti positivi, come $x^4 + 106x = 4x^3 + 19x^2 + 120$, ovviamente con una diversa notazione; Cartesio attorno al 1620 e, prima di lui Stifel e e Christopher Clavius, pongono le equazioni nella forma: termine di

grado massimo uguale a tutti gli altri termini come $x^4 = 4x^3+19x^2-106x+120$; ancora, Harriot e Faulhaber le scrivono nella forma: termini variabili uguagliati al termine costante $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x = 120$ [10]. Tutti questi modi di scrivere, con i termini che vengono correttamente spostati a sinistra od a destra dell'uguale testimoniano la concezione *additiva* dei polinomi, intesi come somme od aggregati di termini. La concezione *moltiplicativa* di polinomio inteso come il risultato del prodotto di altri polinomi più semplici compare talvolta nell'*Ars Magna* di Cardano e sarà utilizzata ed apprezzata appieno a partire dal XVII secolo, già in Harriot e Roth ma soprattutto con Cartesio.

Bibliografia

[1] S. Unguru: On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, (1975), 67-114.

[2] F. Cajori: *History of Mathematical Notations I. Notations in Elementary Mathematics.* Open Court, La Salle, Illinois (U.S.A.), (1974); ristampa dell'originale pubblicato nel 1928 dalla stessa casa editrice.

[3] C.B. Boyer: Zero: the symbol, the concept, the number. *Nat. Math. Mag.* **18**, 323–330, (1944).

[4] F. Cajori: Sexagesimal fractions among the Babilonians. *American Mathematical Monthly*, **29**, 8–10, (1922).

[5] J. Sesiano: The appearance of negative solutions in Mediaeval Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, **32**, 105–149, (1984).

[6] A.F. Horadam: Fibonacci's mathematical letter to Master Theodorus. *The Fibonacci Quarterly*, **29**, 103–107, (1991).

[7] F. Viète: *In Artem Analyticem Isagoge*, Mettayer, Turonis, (1591).

[8] A. Girard: Invention Nouvelle en l'Algèbre, Blaeuw, Amsterdam, (1629). Ristampata a cura di D. Bierens de Haan, Leida, (1884).

[9] J.-P. Tignol: *Galois' Theory of Algebraic Equations.* World Scientific, Singapore, (2001).

[10] K. Manders: Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes. *Historia Mathematica* **33**, (2006), 184-209.